

3 domčeky a 3 studničky

RNDr. Ladislav Spišiak

Gymnázium, Šrobárova 1, Košice

2020

Úloha:

- Na lúke sa nachádzajú 3 domčeky A, B, C a 3 studničky x, y, z .

Úloha:

- Na lúke sa nachádzajú 3 domčeky A, B, C a 3 studničky x, y, z .
- Od každého domčeka má viesť ku každej studničke jedna cestička na lúke tak,

Úloha:

- Na lúke sa nachádzajú 3 domčeky A, B, C a 3 studničky x, y, z .
- Od každého domčeka má viesť ku každej studničke jedna cestička na lúke tak,
 - aby neprechádzala cez žiadny iný domček ani cez žiadnu inú studničku,

Úloha:

- Na lúke sa nachádzajú 3 domčeky A, B, C a 3 studničky x, y, z .
- Od každého domčeka má viesť ku každej studničke jedna cestička na lúke tak,
 - aby neprechádzala cez žiadny iný domček ani cez žiadnu inú studničku,
 - aby žiadne dve rôzne cestičky nemali spoločné body okrem koncových (teda aby sa žiadne dve cestičky navzájom nepretínali ani nedotýkali).

Úloha:

- Na lúke sa nachádzajú 3 domčeky A, B, C a 3 studničky x, y, z .
- Od každého domčeka má viesť ku každej studničke jedna cestička na lúke tak,
 - aby neprechádzala cez žiadny iný domček ani cez žiadnu inú studničku,
 - aby žiadne dve rôzne cestičky nemali spoločné body okrem koncových (teda aby sa žiadne dve cestičky navzájom nepretínali ani nedotýkali).
- Navrhnite cestičky na lúke tak, aby boli splnené všetky tieto podmienky.

Úloha:

- Na lúke sa nachádzajú 3 domčeky A, B, C a 3 studničky x, y, z .
- Od každého domčeka má viesť ku každej studničke jedna cestička na lúke tak,
 - aby neprechádzala cez žiadny iný domček ani cez žiadnu inú studničku,
 - aby žiadne dve rôzne cestičky nemali spoločné body okrem koncových (teda aby sa žiadne dve cestičky navzájom nepretínali ani nedotýkali).
- Navrhnite cestičky na lúke tak, aby boli splnené všetky tieto podmienky.
- Príklad niekoľkých (nie všetkých) cestičiek:

A

B

C

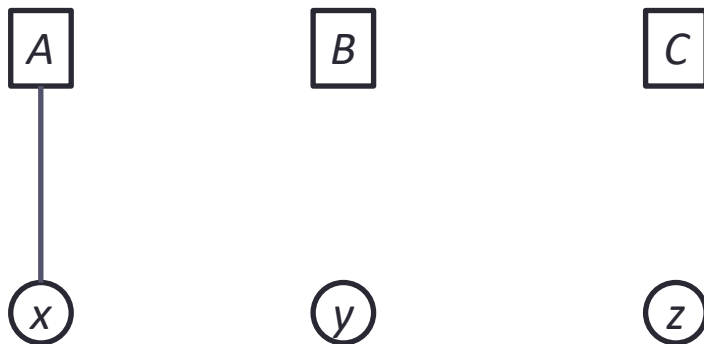
x

y

z

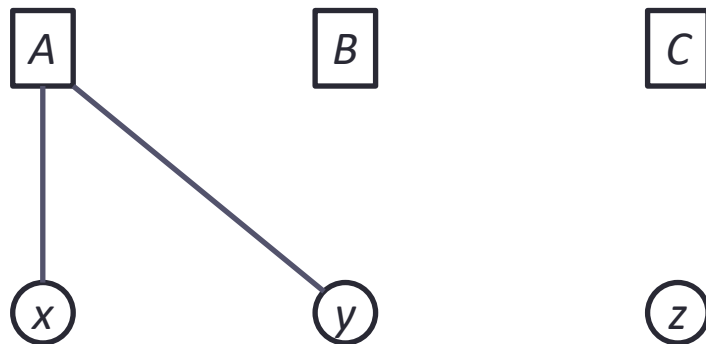
Úloha:

- Na lúke sa nachádzajú 3 domčeky A , B , C a 3 studničky x , y , z .
- Od každého domčeka má viesť ku každej studničke jedna cestička na lúke tak,
 - aby neprechádzala cez žiadny iný domček ani cez žiadnu inú studničku,
 - aby žiadne dve rôzne cestičky nemali spoločné body okrem koncových (teda aby sa žiadne dve cestičky navzájom nepretínali ani nedotýkali).
- Navrhnite cestičky na lúke tak, aby boli splnené všetky tieto podmienky.
- Príklad niekoľkých (nie všetkých) cestičiek:



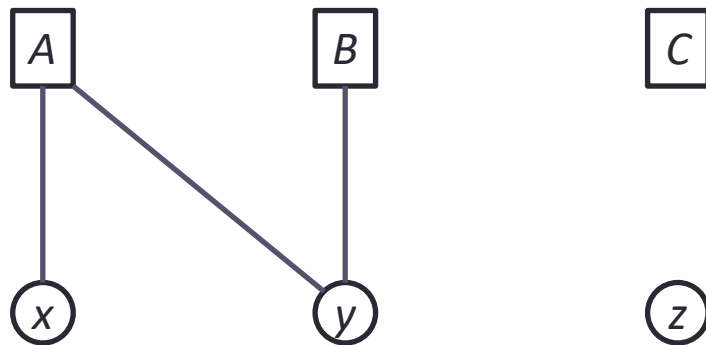
Úloha:

- Na lúke sa nachádzajú 3 domčeky A, B, C a 3 studničky x, y, z .
- Od každého domčeka má viesť ku každej studničke jedna cestička na lúke tak,
 - aby neprechádzala cez žiadny iný domček ani cez žiadnu inú studničku,
 - aby žiadne dve rôzne cestičky nemali spoločné body okrem koncových (teda aby sa žiadne dve cestičky navzájom nepretínali ani nedotýkali).
- Navrhnite cestičky na lúke tak, aby boli splnené všetky tieto podmienky.
- Príklad niekoľkých (nie všetkých) cestičiek:



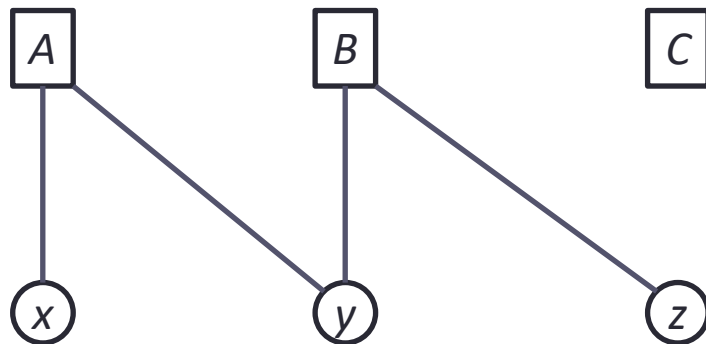
Úloha:

- Na lúke sa nachádzajú 3 domčeky A , B , C a 3 studničky x , y , z .
- Od každého domčeka má viesť ku každej studničke jedna cestička na lúke tak,
 - aby neprechádzala cez žiadny iný domček ani cez žiadnu inú studničku,
 - aby žiadne dve rôzne cestičky nemali spoločné body okrem koncových (teda aby sa žiadne dve cestičky navzájom nepretínali ani nedotýkali).
- Navrhnite cestičky na lúke tak, aby boli splnené všetky tieto podmienky.
- Príklad niekoľkých (nie všetkých) cestičiek:



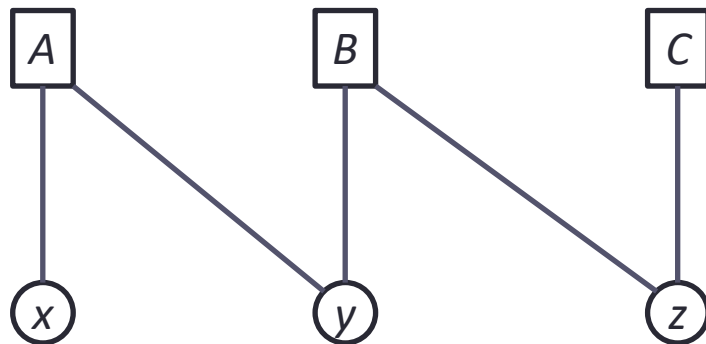
Úloha:

- Na lúke sa nachádzajú 3 domčeky A, B, C a 3 studničky x, y, z .
- Od každého domčeka má viesť ku každej studničke jedna cestička na lúke tak,
 - aby neprechádzala cez žiadny iný domček ani cez žiadnu inú studničku,
 - aby žiadne dve rôzne cestičky nemali spoločné body okrem koncových (teda aby sa žiadne dve cestičky navzájom nepretínali ani nedotýkali).
- Navrhnite cestičky na lúke tak, aby boli splnené všetky tieto podmienky.
- Príklad niekoľkých (nie všetkých) cestičiek:



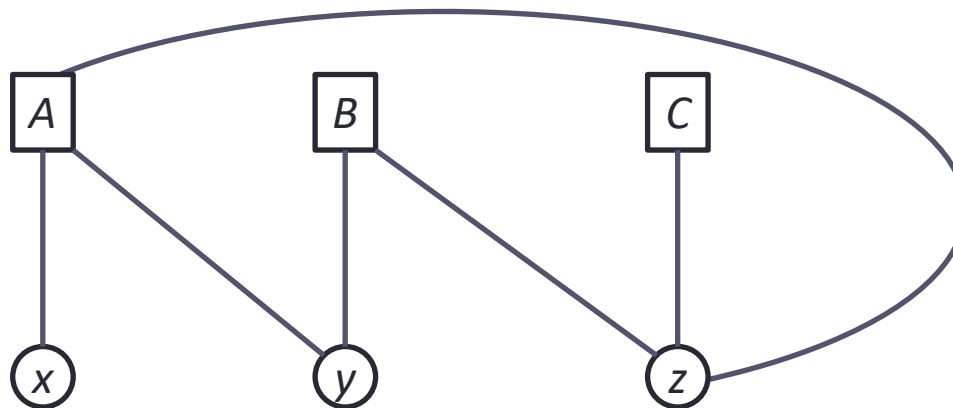
Úloha:

- Na lúke sa nachádzajú 3 domčeky A, B, C a 3 studničky x, y, z .
- Od každého domčeka má viesť ku každej studničke jedna cestička na lúke tak,
 - aby neprechádzala cez žiadny iný domček ani cez žiadnu inú studničku,
 - aby žiadne dve rôzne cestičky nemali spoločné body okrem koncových (teda aby sa žiadne dve cestičky navzájom nepretínali ani nedotýkali).
- Navrhnite cestičky na lúke tak, aby boli splnené všetky tieto podmienky.
- Príklad niekoľkých (nie všetkých) cestičiek:



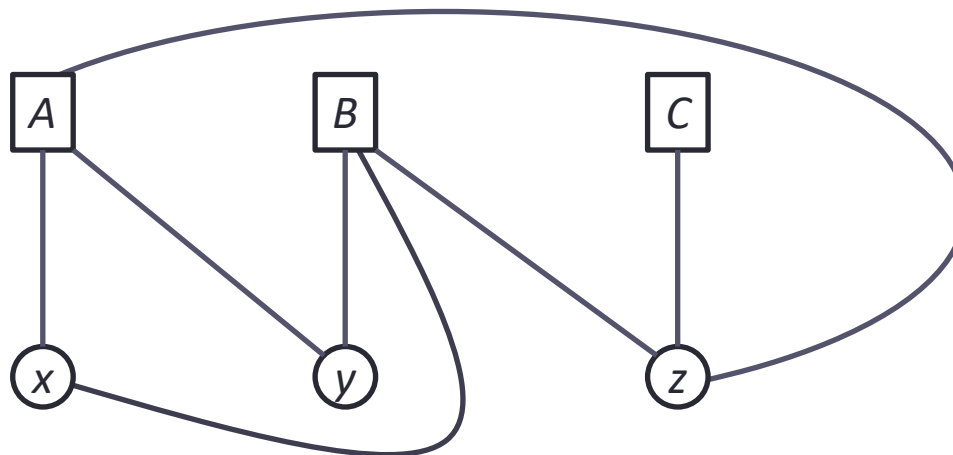
Úloha:

- Na lúke sa nachádzajú 3 domčeky A, B, C a 3 studničky x, y, z .
- Od každého domčeka má viesť ku každej studničke jedna cestička na lúke tak,
 - aby neprechádzala cez žiadny iný domček ani cez žiadnu inú studničku,
 - aby žiadne dve rôzne cestičky nemali spoločné body okrem koncových (teda aby sa žiadne dve cestičky navzájom nepretínali ani nedotýkali).
- Navrhnite cestičky na lúke tak, aby boli splnené všetky tieto podmienky.
- Príklad niekoľkých (nie všetkých) cestičiek:



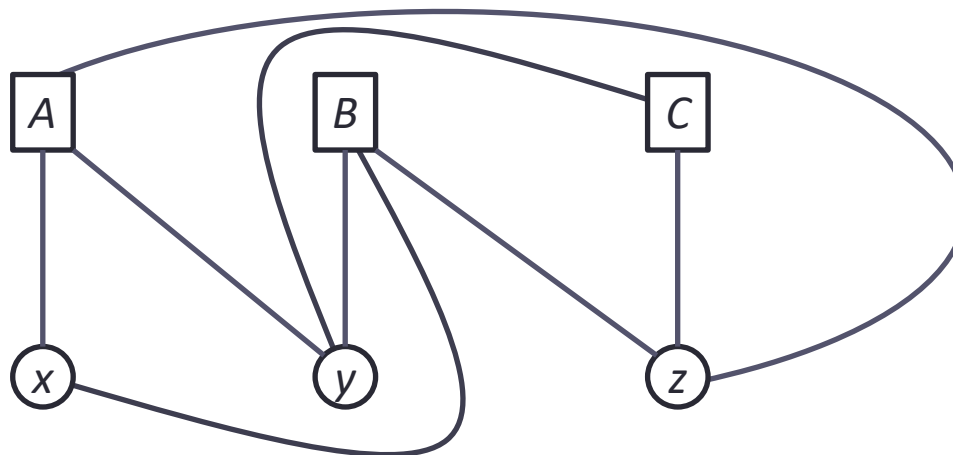
Úloha:

- Na lúke sa nachádzajú 3 domčeky A, B, C a 3 studničky x, y, z .
- Od každého domčeka má viesť ku každej studničke jedna cestička na lúke tak,
 - aby neprechádzala cez žiadny iný domček ani cez žiadnu inú studničku,
 - aby žiadne dve rôzne cestičky nemali spoločné body okrem koncových (teda aby sa žiadne dve cestičky navzájom nepretínali ani nedotýkali).
- Navrhnite cestičky na lúke tak, aby boli splnené všetky tieto podmienky.
- Príklad niekoľkých (nie všetkých) cestičiek:



Úloha:

- Na lúke sa nachádzajú 3 domčeky A, B, C a 3 studničky x, y, z .
- Od každého domčeka má viesť ku každej studničke jedna cestička na lúke tak,
 - aby neprechádzala cez žiadny iný domček ani cez žiadnu inú studničku,
 - aby žiadne dve rôzne cestičky nemali spoločné body okrem koncových (teda aby sa žiadne dve cestičky navzájom nepretínali ani nedotýkali).
- Navrhnite cestičky na lúke tak, aby boli splnené všetky tieto podmienky.
- Príklad niekoľkých (nie všetkých) cestičiek:



**Dajú sa vôbec všetky podmienky
splniť?**

Dajú sa vôbec všetky podmienky splniť?

- Nedarí sa vám nájsť riešenie úlohy?

Dajú sa vôbec všetky podmienky splniť?

- Nedarí sa vám nájsť riešenie úlohy?
- Začali ste pochybovať, či vôbec existujú cestičky, ktoré vyhovujú všetkým podmienkam?

Dajú sa vôbec všetky podmienky splniť?

- Nedarí sa vám nájsť riešenie úlohy?
- Začali ste pochybovať, či vôbec existujú cestičky, ktoré vyhovujú všetkým podmienkam?
- ???

Dajú sa vôbec všetky podmienky splniť?

- Nedarí sa vám nájsť riešenie úlohy?
- Začali ste pochybovať, či vôbec existujú cestičky, ktoré vyhovujú všetkým podmienkam?
- ???
- O tom, ako je to s existenciou požadovaných cestičiek, sa dozviete (aj s odôvodnením) na ďalších stranách prezentácie.

Dajú sa vôbec všetky podmienky splniť?

- Nedarí sa vám nájsť riešenie úlohy?
- Začali ste pochybovať, či vôbec existujú cestičky, ktoré vyhovujú všetkým podmienkam?
- ???
- O tom, ako je to s existenciou požadovaných cestičiek, sa dozviete (aj s odôvodnením) na ďalších stranách prezentácie.
- **WARNING!**

Dajú sa vôbec všetky podmienky splniť?

- Nedarí sa vám nájsť riešenie úlohy?
- Začali ste pochybovať, či vôbec existujú cestičky, ktoré vyhovujú všetkým podmienkam?
- ???
- O tom, ako je to s existenciou požadovaných cestičiek, sa dozviete (aj s odôvodnením) na ďalších stranách prezentácie.
- **WARNING!**
- Ak chcete aj ďalej riešiť úlohu samostatne, nevstupujte na ďalšie stránky prezentácie!!!

Odpoved':

**podmienky sa splniť nedajú,
požadované cestičky nemôžu
existovať.**

Odpoved':

**podmienky sa splniť nedajú,
požadované cestičky nemôžu
existovať.**

- Problém: ako sa o tom môžeme presvedčiť? Ako sa dá odôvodniť takýto negatívny záver (že sa „to“ nedá splniť)?

Odpoveď:

**podmienky sa splniť nedajú,
požadované cestičky nemôžu
existovať.**

- Problém: ako sa o tom môžeme presvedčiť? Ako sa dá odôvodniť takýto negatívny záver (že sa „to“ nedá splniť)?
- Je nekonečne veľa možností, ktorými sa dá skúšať kresliť cestičky. Rozbor všetkých týchto možností teda neprichádza do úvahy (zvládnuť by to mohol snád' iba Chuck Norris).

**Namiesto rozboru nekonečne veľa
všetkých možností:**

Namiesto rozboru nekonečne veľa všetkých možností:

- Skúmajme, aké vlastnosti by museli mať cestičky na lúke, keby naozaj boli splnené všetky požadované podmienky:

Namiesto rozboru nekonečne veľa všetkých možností:

- Skúmajme, aké vlastnosti by museli mať cestičky na lúke, keby naozaj boli splnené všetky požadované podmienky:
 - cestičky, domčeky a studničky by rozdeľovali lúku na konečne veľa k neprekrývajúcich sa oblastí, z ktorých jedna je „vonkajšia“ plocha,

Namiesto rozboru nekonečne veľa všetkých možností:

- Skúmajme, aké vlastnosti by museli mať cestičky na lúke, keby naozaj boli splnené všetky požadované podmienky:
 - cestičky, domčeky a studničky by rozdeľovali lúku na konečne veľa k neprekrývajúcich sa oblastí, z ktorých jedna je „vonkajšia“ plocha,
 - cestičiek by muselo byť 9, lebo od každého z 3 domčekov vedie jedna cestička ku každej z 3 studničiek.

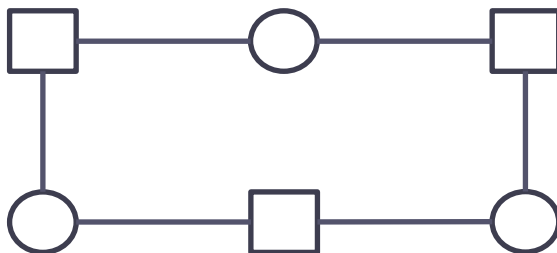
- Každá z oblastí by musela byť ohraničená párnym počtom cestičiek, lebo cestička vždy spája domček so studničkou, takže domčeky a studničky sa musia na hranici oblasti pravidelne striedať a teda ich musí byť na hranici oblasti párny počet.

- Každá z oblastí by musela byť ohraničená párnym počtom cestičiek, lebo cestička vždy spája domček so studničkou, takže domčeky a studničky sa musia na hranici oblasti pravidelne striedať a teda ich musí byť na hranici oblasti párny počet.
- Žiadna oblasť by nebola ohraničená 2 cestičkami, lebo vtedy by 2 cestičky spájali domček s tou istou studničkou, čo odporuje podmienke v zadaní úlohy.

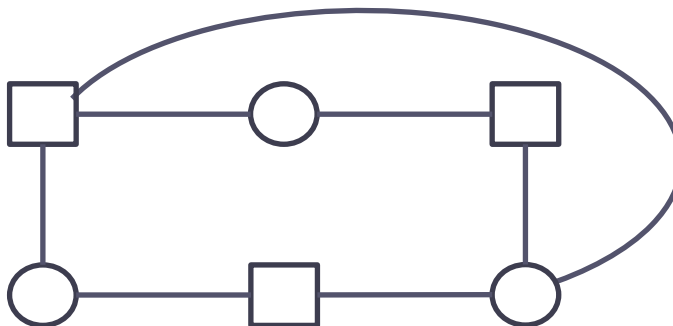
- Každá z oblastí by musela byť ohraničená párnym počtom cestičiek, lebo cestička vždy spája domček so studničkou, takže domčeky a studničky sa musia na hranici oblasti pravidelne striedať a teda ich musí byť na hranici oblasti párny počet.
- Žiadna oblasť by nebola ohraničená 2 cestičkami, lebo vtedy by 2 cestičky spájali domček s tou istou studničkou, čo odporuje podmienke v zadaní úlohy.
- Žiadna oblasť by nebola ohraničená 8 alebo viac cestičkami, lebo domčekov a studničiek je spolu iba 6.

- Každá z oblastí by musela byť ohraničená párnym počtom cestičiek, lebo cestička vždy spája domček so studničkou, takže domčeky a studničky sa musia na hranici oblasti pravidelne striedať a teda ich musí byť na hranici oblasti párny počet.
- Žiadna oblasť by nebola ohraničená 2 cestičkami, lebo vtedy by 2 cestičky spájali domček s tou istou studničkou, čo odporuje podmienke v zadaní úlohy.
- Žiadna oblasť by nebola ohraničená 8 alebo viac cestičkami, lebo domčekov a studničiek je spolu iba 6.
- Žiadna oblasť by nebola ohraničená 6 cestičkami, lebo vtedy by sa na hranici tejto oblasti striedali všetky 3 domčeky so všetkými 3 studničkami. Potom by ostatné 3 cestičky museli ležať na lúke mimo tejto oblasti a nesmeli by sa pretínať, čo nie je možné.

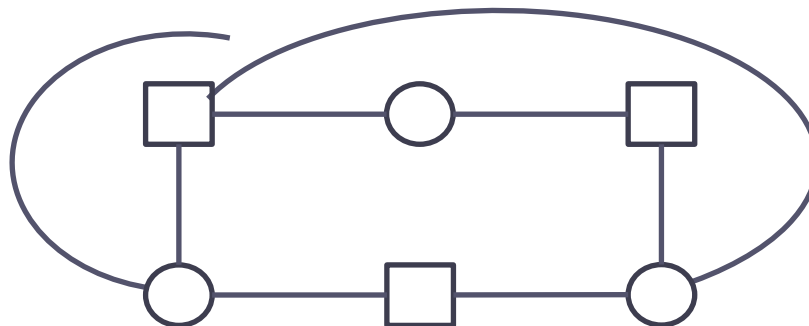
- Každá z oblastí by musela byť ohraničená párnym počtom cestičiek, lebo cestička vždy spája domček so studničkou, takže domčeky a studničky sa musia na hranici oblasti pravidelne striedať a teda ich musí byť na hranici oblasti párny počet.
- Žiadna oblasť by nebola ohraničená 2 cestičkami, lebo vtedy by 2 cestičky spájali domček s tou istou studničkou, čo odporuje podmienke v zadaní úlohy.
- Žiadna oblasť by nebola ohraničená 8 alebo viac cestičkami, lebo domčekov a studničiek je spolu iba 6.
- Žiadna oblasť by nebola ohraničená 6 cestičkami, lebo vtedy by sa na hranici tejto oblasti striedali všetky 3 domčeky so všetkými 3 studničkami. Potom by ostatné 3 cestičky museli ležať na lúke mimo tejto oblasti a nesmeli by sa pretínať, čo nie je možné.



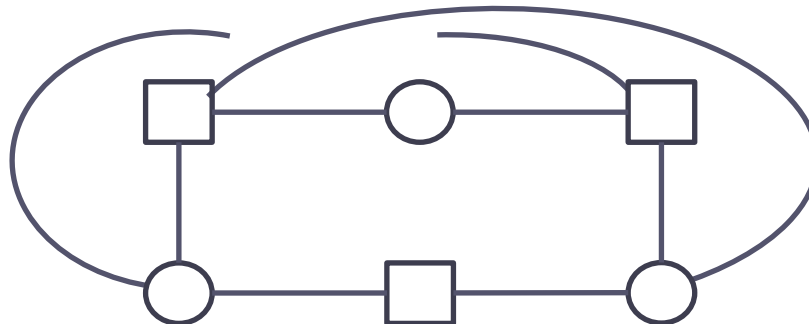
- Každá z oblastí by musela byť ohraničená párnym počtom cestičiek, lebo cestička vždy spája domček so studničkou, takže domčeky a studničky sa musia na hranici oblasti pravidelne striedať a teda ich musí byť na hranici oblasti párny počet.
- Žiadna oblasť by nebola ohraničená 2 cestičkami, lebo vtedy by 2 cestičky spájali domček s tou istou studničkou, čo odporuje podmienke v zadaní úlohy.
- Žiadna oblasť by nebola ohraničená 8 alebo viac cestičkami, lebo domčekov a studničiek je spolu iba 6.
- Žiadna oblasť by nebola ohraničená 6 cestičkami, lebo vtedy by sa na hranici tejto oblasti striedali všetky 3 domčeky so všetkými 3 studničkami. Potom by ostatné 3 cestičky museli ležať na lúke mimo tejto oblasti a nesmeli by sa pretínať, čo nie je možné.



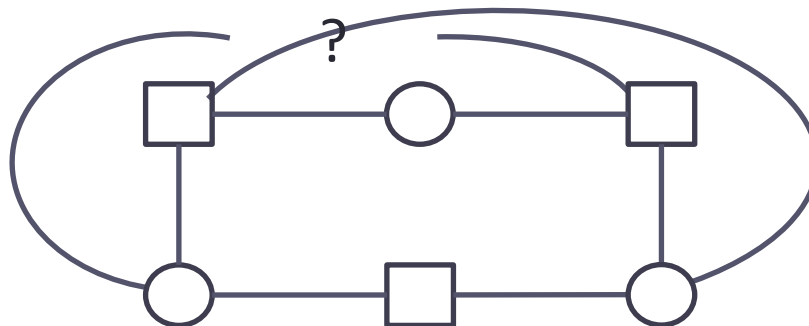
- Každá z oblastí by musela byť ohraničená párnym počtom cestičiek, lebo cestička vždy spája domček so studničkou, takže domčeky a studničky sa musia na hranici oblasti pravidelne striedať a teda ich musí byť na hranici oblasti párny počet.
- Žiadna oblasť by nebola ohraničená 2 cestičkami, lebo vtedy by 2 cestičky spájali domček s tou istou studničkou, čo odporuje podmienke v zadaní úlohy.
- Žiadna oblasť by nebola ohraničená 8 alebo viac cestičkami, lebo domčekov a studničiek je spolu iba 6.
- Žiadna oblasť by nebola ohraničená 6 cestičkami, lebo vtedy by sa na hranici tejto oblasti striedali všetky 3 domčeky so všetkými 3 studničkami. Potom by ostatné 3 cestičky museli ležať na lúke mimo tejto oblasti a nesmeli by sa pretínať, čo nie je možné.



- Každá z oblastí by musela byť ohraničená párnym počtom cestičiek, lebo cestička vždy spája domček so studničkou, takže domčeky a studničky sa musia na hranici oblasti pravidelne striedať a teda ich musí byť na hranici oblasti párný počet.
- Žiadna oblasť by nebola ohraničená 2 cestičkami, lebo vtedy by 2 cestičky spájali domček s tou istou studničkou, čo odporuje podmienke v zadaní úlohy.
- Žiadna oblasť by nebola ohraničená 8 alebo viac cestičkami, lebo domčekov a studničiek je spolu iba 6.
- Žiadna oblasť by nebola ohraničená 6 cestičkami, lebo vtedy by sa na hranici tejto oblasti striedali všetky 3 domčeky so všetkými 3 studničkami. Potom by ostatné 3 cestičky museli ležať na lúke mimo tejto oblasti a nesmeli by sa pretínať, čo nie je možné.



- Každá z oblastí by musela byť ohraničená párnym počtom cestičiek, lebo cestička vždy spája domček so studničkou, takže domčeky a studničky sa musia na hranici oblasti pravidelne striedať a teda ich musí byť na hranici oblasti párny počet.
- Žiadna oblasť by nebola ohraničená 2 cestičkami, lebo vtedy by 2 cestičky spájali domček s tou istou studničkou, čo odporuje podmienke v zadaní úlohy.
- Žiadna oblasť by nebola ohraničená 8 alebo viac cestičkami, lebo domčekov a studničiek je spolu iba 6.
- Žiadna oblasť by nebola ohraničená 6 cestičkami, lebo vtedy by sa na hranici tejto oblasti striedali všetky 3 domčeky so všetkými 3 studničkami. Potom by ostatné 3 cestičky museli ležať na lúke mimo tejto oblasti a nesmeli by sa pretínať, čo nie je možné.



- Preto každá z k oblastí by musela byť ohraničená práve 4 cestičkami.

- Preto každá z k oblastí by musela byť ohraničená práve 4 cestičkami.
- Keď je každá z k oblastí ohraničená 4 cestičkami, tak súčin $4k$ predstavuje dvojnásobok počtu všetkých cestičiek, teda $2 \cdot 9$, lebo každá cestička je započítaná dvakrát, keďže patrí k dvom (susedným) oblastiam.

- Preto každá z k oblastí by musela byť ohraničená práve 4 cestičkami.
- Keď je každá z k oblastí ohraničená 4 cestičkami, tak súčin $4k$ predstavuje dvojnásobok počtu všetkých cestičiek, teda $2 \cdot 9$, lebo každá cestička je započítaná dvakrát, keďže patrí k dvom (susedným) oblastiam.
- Teda by muselo platiť $4k = 18$, ale k je počet oblastí, teda celé číslo.

- Preto každá z k oblastí by musela byť ohraničená práve 4 cestičkami.
- Keď je každá z k oblastí ohraničená 4 cestičkami, tak súčin $4k$ predstavuje dvojnásobok počtu všetkých cestičiek, teda $2 \cdot 9$, lebo každá cestička je započítaná dvakrát, keďže patrí k dvom (susedným) oblastiam.
- Teda by muselo platiť $4k = 18$, ale k je počet oblastí, teda celé číslo.
- **To nie je možné, preto nemôžu existovať cestičky, ktoré vyhovujú všetkým podmienkam úlohy.**

- Preto každá z k oblastí by musela byť ohraničená práve 4 cestičkami.
- Keď je každá z k oblastí ohraničená 4 cestičkami, tak súčin $4k$ predstavuje dvojnásobok počtu všetkých cestičiek, teda $2 \cdot 9$, lebo každá cestička je započítaná dvakrát, keďže patrí k dvom (susedným) oblastiam.
- Teda by muselo platiť $4k = 18$, ale k je počet oblastí, teda celé číslo.
- **To nie je možné, preto nemôžu existovať cestičky, ktoré vyhovujú všetkým podmienkam úlohy.**

Teší ma váš záujem o matematické zaujímavosti.

Rád privítam vaše otázky, pripomienky a návrhy.

mail: spisiakL@srobarka.sk